# MANUAL DE LABORATÓRIO DE FÍSICA

Me. João Carlos Botelho Carrero

2024

## Capítulo 1: Tratamento de Dados Experimentais

## • Introdução

Os Tecnólogos e os Engenheiros trabalham com grandezas físicas e com modelos matemáticos na elaboração de seus projetos. Na maioria das vezes, utilizam dados fornecidos por terceiros e, por vezes, são geradores de dados. O sucesso ou o fracasso de seus projetos depende muito da qualidade desses dados. Por isso o experimentador deve ter por princípio a honestidade. Não deve haver vícios nos dados experimentais. Eles devem refletir o comportamento da grandeza avaliada no processo de medição.

Grandezas físicas representam propriedades da natureza. Estas grandezas são chamadas de observáveis, isto é, podem ser verificadas experimentalmente (medição) e sob condições controladas e definidas acontecem sempre e podem ser verificadas por qualquer pessoa.

Para determinarmos quantitativamente uma grandeza física envolvida num dado fenômeno é necessário o uso de instrumentos. Os instrumentos de medição fornecem medidas quantitativas (intensidade numa dada escala) diretas e/ou indiretas.

Um exemplo de medida direta é a medida da variação da tensão ou de corrente elétrica. No segundo caso, a grandeza de interesse é determinada de modo indireto, ou seja, a partir de medidas diretas e de modelos matemáticos chega-se à determinação da grandeza em questão. Por exemplo, a determinação da distância entre íons paramagnéticos em um cristal pela técnica da Ressonância Paramagnética.

Naturalmente em todo e qualquer processo de medição ocorrem erros e variações. O importante é que o experimentador deve estar sempre, imbuído da maior vontade de acertar.

- **Sistemas de Unidades**

Ao expressar uma grandeza física é necessário utilizar-se de um sistema de unidades, devendo-se manter a coerência, ou seja, todas as grandezas medidas deverão ser indicadas num mesmo sistema de unidades. A seguir algumas grandezas e suas respectivas unidades do Sistema Internacional (S.I.):

| Grandeza | Unidade | Símbolo |
|---|---|---|
| **Aceleração** | metro por segundo ao quadrado | $m/s^2$ |
| **Aceleração Angular** | radiano por segundo ao quadrado | $rad/s^2$ |
| **Ângulo** | radiano | rad |
| **Ângulo Sólido** | esterradiano | sr |
| **Comprimento** | Metro | m |
| **Energia** | Joule | J |
| **Força** | newton | N |
| **Freqüência** | Hertz | Hz |
| **Impulso** | newton-segundo | N.s |
| **Massa** | quilograma | kg |
| **Momento Angular** | quilograma-metro quadrado por segundo | $kg.m^2/s$ |
| **Momento de Inércia** | quilograma-metro quadrado | $kg.m^2$ |
| **Momento Linear** | quilograma-metro por segundo | kg.m/s |
| **Potência** | Watt | W |
| **Pressão** | pascal | Pa |
| **Quantidade de substância** | Mol | mol |
| **Temperatura** | Kelvin | K |
| **Tempo** | segundo | s |
| **Torque** | newton-metro | N.m |
| **Velocidade** | metro por segundo | m/s |
| **Velocidade Angular** | radiano por segundo | rad/s |

É recomendável escrever uma grandeza física muito grande ou muito pequena utilizando as chamadas notação científica e notação de engenharia. Nestes casos, a potência de dez deve ser substituída pelos respectivos prefixos:

| prefixo | símbolo | fator | prefixo | símbolo | fator | prefixo | símbolo | fator |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| iocto | y | $10^{-24}$ | mili | m | $10^{-3}$ | mega | M | $10^{6}$ |
| zepto | z | $10^{-21}$ | centi | c | $10^{-2}$ | giga | G | $10^{9}$ |
| ato | a | $10^{-18}$ | deci | d | $10^{-1}$ | tera | T | $10^{12}$ |
| femto | f | $10^{-15}$ | - | - | $10^{0} = 1$ | peta | P | $10^{15}$ |
| pico | p | $10^{-12}$ | deca | da | $10^{1}$ | exa | E | $10^{18}$ |
| nano | n | $10^{-9}$ | hecto | h | $10^{2}$ | zeta | Z | $10^{21}$ |
| micro | μ | $10^{-6}$ | quilo | k | $10^{3}$ | iota | Y | $10^{24}$ |

- **Notação Científica**

A notação científica é caracterizada por manter o número escrito entre 0 e 10, ajustando-se o expoente da potência de dez para isto. Neste caso nem sempre haverá um prefixo para a potência de dez. Por exemplo: 460.000 = 4,6 x $10^5$. Veja na tabela que não tem prefixo para $10^5$.

- **Notação de Engenharia**

A notação de engenharia é caracterizada por ajustar o expoente da potência de dez de três em três unidades. Neste caso sempre haverá um prefixo para a potência de dez.
Por exemplo: 460.000N = 460 x $10^3$N = 460kN. Veja na tabela que o prefixo para $10^3$ é o quilo (k) que poderá substituir a potência $10^3$ nos casos previstos pelas regras a seguir:

- **Regras para o uso dos prefixos das potências de dez**

a) A potência de dez que representa a ordem de grandeza de um número somente pode ser substituída por um prefixo se este número for um dimensional, que tem unidade de medida.

Por exemplo: 460.000 m = 460 x $10^3$ m = 460 km.

b) O prefixo e a unidade formam uma nova unidade.

Por exemplo: 460 $mm^2$ = 460 $(10^{-3}\ m)^2$ = 460 x $10^{-6}\ m^2$.

c) Se houver prefixo este deve ser único e ficar no numerador se houver fração entre unidades diferentes. Por exemplo: 460 N/mm = 460 N/$(10^{-3}$ m) = 460 x $10^3$ N/m = 460 kN/m

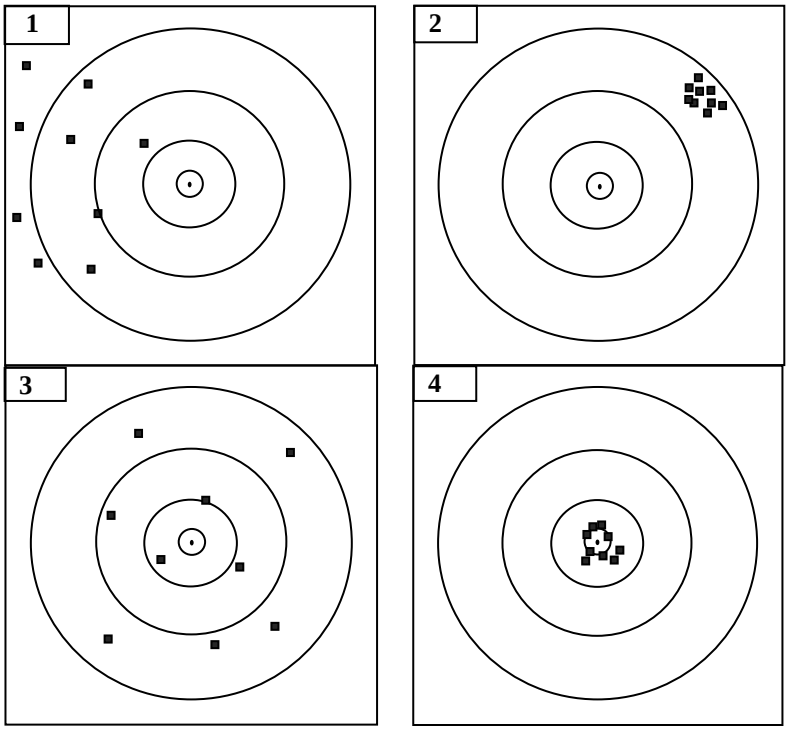
d) Não há o ponto "." entre o prefixo e a unidade. Se houver o ponto "." não é prefixo é produto entre diferentes unidades de medida. Por exemplo: 15 mN é força, em milinewton. Já 15m.N é torque de uma força, em metro-newton.

- **Precisão e Exatidão**

O conceito de exatidão está relacionado à proximidade entre o melhor valor experimental (valor médio) e o valor verdadeiro (ou intencional) de uma grandeza física. A falta de exatidão normalmente ocorre em função da existência de erros sistemáticos.

A precisão está relacionada à dispersão (espalhamento) das várias leituras feitas de uma medida com relação ao valor médio. A precisão está ligada aos erros aleatórios (estatísticos).

Um exemplo é um ensaio de tiro ao alvo: São disparados 9 projéteis em direção à mosca (centro do alvo) em quatro sessões:




*Comentário*: Na primeira sessão, a posição média dos projéteis está longe da mosca (não tem exatidão), ao mesmo tempo em que estão muito espalhados (não tem boa precisão). Na quarta sessão, os projéteis estão pouco espalhados (precisão) e sua posição média muito próxima da mosca (exatidão).

Na tabela abaixo, os resultados quanto à precisão e exatidão dos tiros em cada sessão:

| **sessão** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **exatidão** | não | não | sim | sim |
| **precisão** | não | sim | não | sim |

- **Medição**

Uma grandeza física experimental pode ser entendida como qualquer grandeza física cujo valor é determinado à partir de um conjunto de dados experimentais (medida), assim o que se procura ao medir uma grandeza é determinar o melhor valor experimental que representa esta grandeza.

Existem grandezas que possuem o que chamamos de valor verdadeiro, ou seja, são aquelas que possuem um valor determinado a priori (de início). Como exemplo podemos citar uma grandeza geométrica: A soma dos ângulos internos de um triângulo (180º).

Para uma grandeza física, a verificação de um valor verdadeiro é feita experimentalmente, assim o valor verdadeiro exato de uma grandeza física é sempre desconhecido.

Ao efetuarmos uma medida de uma grandeza física observamos que o valor medido, a cada medida feita, fornece um resultado diferente para esta grandeza, é claro que dentro de um certo intervalo.

Observamos então, que a medida está sujeita a erros e frequentemente, não conseguimos eliminar estes erros, pois são inerentes ao processo de medida.

Deste modo, por melhores que sejam os métodos e os instrumentos de medida, o valor encontrado para a grandeza física será sempre uma aproximação do valor verdadeiro.

Os erros de uma medida são normalmente classificados em dois tipos:

- **Erros Sistemáticos**

Os erros sistemáticos estão relacionados a equipamentos incorretamente ajustados e/ou calibrados, ao uso de um procedimento experimental incorreto pelo experimentador ou a uma falha conceitual.

Medidas idênticas de uma dada grandeza podem apresentar erro sistemático. Neste caso, o valor médio verdadeiro $x_{mv}$ não representa o valor verdadeiro $x_v$ da grandeza. A diferença entre o valor verdadeiro e o valor médio verdadeiro é o erro sistemático das medidas ($s_r$).

Uma forma de evitar ou pelo menos, minimizar a ocorrência de erros sistemáticos é trabalhar com instrumentos/equipamentos devidamente calibrados e aferidos, dominar e aperfeiçoar o método experimental, bem como os modelos empregados.

- **Erros Estatísticos**

Erros estatísticos resultam de variações aleatórias no valor de uma grandeza, devido a fatores que não podem ser controlados ou por qualquer motivo não são controlados. Essas variações podem ter sua origem na própria grandeza ou no valor da grandeza que é obtido no processo de medição (incerteza estatística $s_e$). Este tipo de erro é tão mais reduzido, quanto maior for o número de leituras realizadas de uma dada grandeza.

O objetivo principal da chamada teoria de erros consiste em:

a) Obter o melhor valor para a grandeza física em questão, a partir do conjunto de dados disponível;

b) Estimar quanto o melhor valor obtido para esta grandeza pode ser diferente do valor verdadeiro da grandeza física.

- **Valor Experimental de uma Grandeza Física (x)**

O valor experimental determinado para uma grandeza física não é um único valor, mas sim um intervalo de valores, ou seja, quando você determinar um valor experimental, informará uma

faixa de valores, é a chamada Faixa de Normalidade. Por exemplo, se uma peça apresenta uma característica dentro desta faixa, ela está em conformidade.

Um intervalo de valores que corresponde a um resultado experimental de uma dada grandeza física, é escrito como o valor médio da grandeza seguido pelo sinal "±" e seguido da incerteza da medida:

$$\begin{pmatrix}\text{VALOR}\\ \text{EXPERIMENTAL}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{VALOR}\\ \text{MEDIDO}\end{pmatrix} \pm (\text{INCERTEZA})$$

Nas aulas práticas do Laboratório de Física será realizado um número pequeno de leituras das grandezas físicas envolvidas nas experiências didáticas.

- **Valor Medido ($x_L$)** deverá representado por:
  a) o único valor lido no instrumento ($x_L$), no caso de uma única leitura da grandeza;
  b) o valor médio ($\overline{x}$), no caso de uma única série com n leituras da grandeza;
  c) a média das médias ($\overline{x}_{n.m}$**)**, calculada no caso de m séries com n leituras cada série.

- **Incerteza (s)** deverá ser representada pelas incertezas residual ($s_r$) e pela estatística ($s_e$), seguindo a equação (Teorema de Pitágoras):

$$s^2 = s_r^2 + s_e^2$$

- **Incerteza Residual** ($s_r$)

É representada pela Resolução da Escala (r) ou pela Precisão Instrumental (p) fornecida pelo fabricante do equipamento.

- **Incerteza Estatística** ($s_e$)

a) Use o desvio padrão amostral ($s_x$) para indicar a incerteza estatística quando fizer uma única série com n de leituras de uma grandeza. O desvio padrão de uma grandeza é utilizado para representar a dispersão das n leituras em relação ao valor médio.

b) Use o desvio padrão do valor médio ($\sigma_m$) para indicar a incerteza estatística quando fizer m séries com n leituras cada série. O desvio padrão do valor médio é utilizado para representar a dispersão das m médias em relação à média das médias.

- **Valor Médio** ($\overline{x}$)

O melhor valor experimental de uma grandeza é determinado pelo valor médio da medida, que é a soma de todos os valores das leituras dividido este resultado pelo número n de leituras:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

O valor médio $\bar{x}$ é melhor determinado (tem maior acurácia e maior precisão) quanto maior for o número n de leituras, ou seja, o melhor valor médio seria aquele calculado à partir de um número infinito de leituras daquela grandeza.

Como é impossível realizar um número infinito de leituras, o valor médio verdadeiro é sempre desconhecido e, sempre há uma incerteza em sua determinação.

- **Média das Médias ($\bar{x}_{n.m}$)**

A Estatística recomenda que o número de leituras seja o maior possível, sendo que o número mínimo é de 30 leituras. Deste modo, ao fazer uma medição é comum separar as medições em séries. Por exemplo: Todo dia você consegue fazer 50 medições e fará estas medições durante um mês. Então, as n = 50 medidas feitas num só dia formam uma série e no mês serão m = 30 séries. No total você terá n.m = 50 . 30 = 1500 leituras.

A Média das Médias é a média aritmética das m médias que foram calculadas para cada uma das m séries que tem n leituras cada. Primeiro calcula-se a média de cada série, indicadas por $\bar{x}_j$ .

Depois se calcula a média destas m médias:

$$\bar{x}_{n\cdot m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j$$

- **Resolução da Escala do Instrumento (r)**

A resolução do instrumento (r) é determinada (e indicada) pelo fabricante do equipamento, seja através de informação técnica no manual, seja pela própria escala definida para o equipamento.

Instrumentos analógicos têm resolução definida como a menor divisão da escala, ou seja, a menor distância entre dois traços consecutivos e não numerados da escala. Caso as leituras sejam feitas considerando algarismos até a menor divisão da escala, indique a incerteza residual ($s_r$) da medida pela resolução r. Na área tecnológica é mais comum indicar a medida pela resolução da escala.

Instrumentos digitais têm a resolução definida pelo dígito menos significativo (o algarismo mais à direita do display). Caso os números do display flutuem, o melhor é adotar uma unidade daquele algarismo que flutuar mais lentamente e que possa ser lido.

- **Precisão Instrumental (p)**

É indicada pelo fabricante, seja numa placa com as especificações, seja no manual do instrumento. Pode ser em porcentagem do fundo de escala ou do valor de leitura, ou ainda como um valor fixo.

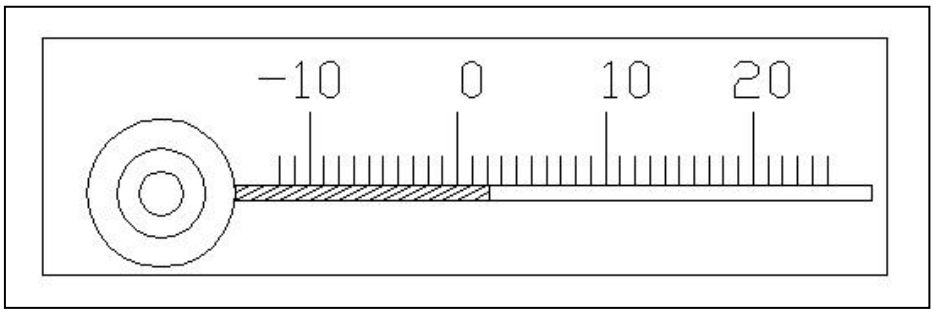
Alguns Instrumentos analógicos permitem que seja feita uma subdivisão da menor divisão da escala “no olho”. Até 10 subdivisões é aceitável, mais do que isto não tem significado.

Caso você decida usar este recurso, deverá indicar a incerteza residual pela precisão instrumental. Este é um recurso mais utilizado quando, numa investigação científica, o pesquisador estiver utilizando o instrumento no seu limite, por não dispor de um instrumento com melhor precisão.

É definida como a metade da menor divisão da escala, ou seja, a metade da resolução do instrumento: $p = \frac{r}{2}$, onde r é a resolução (menor divisão da escala).

- **Fundo de Escala de um Instrumento**

É o chamado "range" ou faixa de medição do instrumento. É especificado pelo menor número estampado na escala (menor leitura) até o maior número estampado na escala (maior leitura) ou é indicado numa placa de identificação do equipamento ou ainda no manual de utilização.




No termômetro representado acima, a menor leitura é – 10ºC e a maior leitura + 20ºC com resolução r = 1ºC.

Você pode indicar a leitura da temperatura feita por este termômetro como:

T = (2 ± 1) ºC. usando a resolução aproxima-se a leitura para o traço mais próximo, ou:

T = (2,2 ± 0,5) ºC usando a precisão instrumental, subdivide-se a resolução em até 10 partes.

- **Desvio padrão amostral ( $s_x$ )**

Utiliza-se o chamado desvio padrão amostral para indicar o quanto as n leituras (resultados) $x_i$ se espalham (desviam ou dispersam) em relação ao valor médio $\bar{x}$, para uma única série de leituras. É definido para uma amostragem (número finito de leituras de uma dada grandeza) como:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Cerca de 68,27% das medidas realizadas ou futuras ficam dentro do intervalo de normalidade que vai desde ( $\bar{x} - s_x$ ) até ( $\bar{x} + s_x$ )

Observe que dentro da fórmula do desvio padrão, tem o desvio da leitura em relação ao valor médio. É definido como a diferença entre o valor da i-ésima leitura $x_i$ e o valor médio $\bar{x}$:

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Veja que o desvio da medida em relação à média é hora positivo, hora negativo. Então, na média tenderá a se anular, quanto maior for o número n de leituras feitas.

- **Desvio padrão do valor médio ( $\sigma_m$ )**

É definido para m séries de medições, cada uma com n leituras, como: $\sigma_m = \frac{s_{n.m}}{\sqrt{n}}$ onde o desvio padrão amostral $s_{n.m}$ é calculado para as n.m leituras de todas as séries. O desvio padrão do valor médio é a incerteza final correspondente aos erros estatísticos, ou seja, indica o grau de confiabilidade de uma medida. É utilizado em Processos de Controle Estatístico de Produção, numa indústria por exemplo. Ali são feitas séries e séries de medições por um experimentador experiente que domina o processo de medição, então ele ganha o direito de expressar a incerteza através do desvio padrão do valor médio, o qual representa a incerteza final num processo de medição.

- **Faixa de Normalidade**

A Curva Normal ou Gaussiana representa a distribuição das frequências (número de repetições de cada leitura) dos dados quando são obtidos de maneira independente e sem vícios.

A chamada Faixa de Normalidade é um intervalo de valores da grandeza física formado pela Média e pela Incerteza.

A Largura da Faixa de Normalidade é igual ao dobro da incerteza. Na figura:

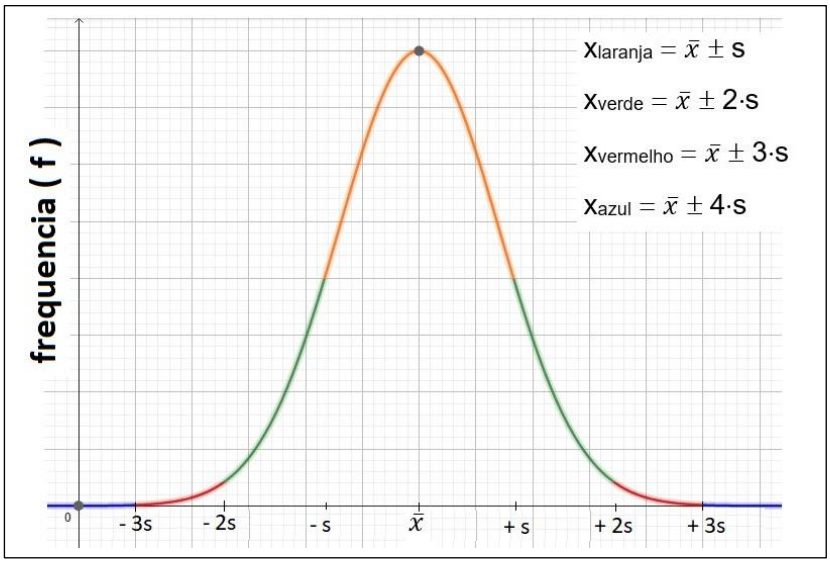
$x_{laranja} = \bar{x} \pm s$ tem cerca de 68,27% dos dados normais, estão dentro da faixa normal

$x_{verde} = \bar{x} \pm 2{\cdot}s$ tem cerca de 95,45% dos dados normais, é usado na área da saúde

$x_{vermelho} = \bar{x} \pm 3{\cdot}s$ tem cerca de 99,73% dos dados normais, é o limite de erro

$x_{azul} = \bar{x} \pm 4{\cdot}s$ tem cerca de 99,99% dos dados normais.

A figura a seguir foi construída no software GEOGEBRA. Os cálculos também foram obtidos por esse software.




Gaussiana reduzida

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

- **Limite de Erro (L):**

O limite de erro é definido como: L = 3.s e representa o valor máximo que pode ter o erro, com 99,73% de probabilidade que as medidas fiquem dentro do intervalo de $\bar{x} - L$ a $\bar{x} + L$. Quando o valor limite de erro é bem definido, L pode ser utilizado para estimar o valor do desvio padrão s.

- **Coeficiente de variação (CV):**

Representa a medida da dispersão relativa entre a dispersão absoluta e o valor médio. é utilizado para a comparação de diferentes distribuições (séries de medidas) de uma mesma grandeza ou de diferentes grandezas, ou seja, determinar qual série teve melhor resultado em termos de precisão.

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{s_e}}{\bar{\mathrm{x}}} \cdot 100\%$$

- **Erro Percentual (E%):**

O erro percentual serve para avaliar o erro sistemático no processo de medição.

Fornece uma comparação entre o valor médio $\bar{x}$ (experimental) e o valor de referência $x_{ref}$ (teórico).

$$\mathrm{E\%} = \frac{|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x_{ref}}|}{\mathrm{x_{ref}}} \cdot 100\%$$

- **Arredondamento**

Será adotada a seguinte convenção para arredondamento:

- Se o algarismo a ser arredondado, for maior que cinco ( > 5 ) será arredondado para cima:

Exemplos: 4,685 ≈ 4,7 25,37 ≈ 25,4 84,9 ≈ 85 81,58 ≈ 82

- Se o algarismo a ser arredondado, for igual a cinco ( = 5 diz-se: seguido de zeros) será arredondado de modo que o algarismo imediatamente à sua esquerda fique par.

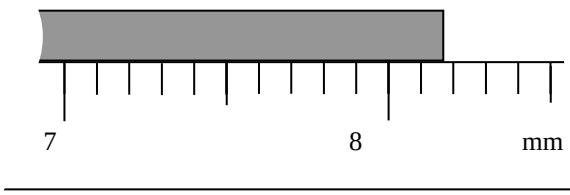
Exemplos: 4,645 ≈ 4,64 25,5 ≈ 26 80,5 ≈ 80 2,335 ≈ 2,34

- Se o algarismo a ser arredondado, for menor que cinco ( < 5 ) será arredondado para baixo:

Exemplos: 4,684 ≈ 4,68 25,333 ≈ 25,3 84,27 ≈ 84

- **Algarismos Significativos**

Frequentemente ocorre que a leitura de uma grandeza fique intermediária entre dois traços consecutivos da escala. No exemplo abaixo, como fazer a leitura?




Certamente a leitura estará entre 8,1 e 8,2mm, então a leitura será "8,1mm mais alguma coisa". Diferentes pessoas podem estimar: 8,10mm; 8,15mm; 8,17mm ou 8,20mm. Neste caso, o último algarismo à direita é duvidoso. Eles foram avaliados por pessoas diferentes, dotadas da maior vontade de acertar. Ainda que não sejam exatos, eles significam: a "melhor vontade de acertar" que é possível através deste instrumento.

Os algarismos certos (exatos) de uma medida e o(s) algarismo(s) duvidoso(s) são chamados de algarismos significativos.

**A indicação de um resultado experimental ou obtido à partir de dados experimentais deve conter apenas, e tão somente, algarismos que sejam significativos.**

Os algarismos menores que o menor algarismo significativo, a ser considerado, devem ser arredondados.

**O menor algarismo significativo a ser considerado** na indicação do valor experimental de uma grandeza é determinado pela posição do menor algarismo significativo da incerteza da medida.

**Como contar os algarismos significativos de uma grandeza?** Para contar os algarismos significativos, olhando o valor da grandeza da esquerda para a direita, comece a contar quando encontrar um número diferente de zero. Este é o primeiro algarismo significativo dessa grandeza. Vá contando todos os números como algarismos significativos até acabar a grandeza ou que a sua direita só tenha zeros. O menor algarismo significativo é aquele diferente de zero que ficar mais a direita da grandeza.

Veja alguns exemplos de contar algarismos significativos:

225 tem 3 algarismos significativos;

5.000.000,00 tem 1 algarismo significativo;

0,000008 tem 1 algarismo significativo;

1.325,000004 tem 10 algarismos significativos;

De modo geral, os zeros à esquerda e os zeros a direita não são considerados significativos, mas representam a ordem de grandeza do número. Por exemplo: 5.000.000,00 = $5.10^6$ a potência $10^6$ representa a ordem de grandeza, no caso, milhão de reais.

Todavia considere que na indicação de um valor experimental, se o número zero estiver representado ele é significativo.

- **Incerteza e os Algarismos Significativos**

Como regra geral e que será adotada no Laboratório de Física, a incerteza de uma medida deverá ser escrita com 01 ou com 02 algarismos significativos.

Considere as seguintes regras:

a) **Escreva com 02 Algarismos Significativos** se o primeiro algarismo significativo (mais à esquerda) for menor do que 3 ( < 3 ). Deste modo, todos os algarismos menores (mais à direita dos dois) devem ser arredondados.

Exemplos: s = 0,02052987 = 0,021 ( somente dois algarismos significativos)

s = 0,0098055 = 0,010 ( somente dois algarismos significativos)

b) **Escreva com 01 Algarismo Significativo** se o primeiro algarismo significativo (mais à esquerda) for maior ou igual a três ( $\geq$ 3 ). Deste modo, todos os algarismos menores (mais à direita dos dois) devem ser arredondados.

Exemplos: s = 0,0052987 = 0,005 ( somente um algarismo significativo)

s = 0,080059 = 0,08 ( somente um algarismo significativo)

- **Valor Médio e os Algarismos Significativos:**

Com o valor da incerteza escrito conforme os casos a ou b, o valor da leitura (ou valor médio) deverá ser arredondado: o menor algarismo significativo do valor da leitura deve ocupar a mesma casa decimal que o menor algarismo significativo do valor da incerteza ocupa. Todos os algarismos menores (à direita) deverão ser arredondados.

**Determina-se então que o menor algarismo significativo a ser considerado** na indicação do valor experimental de uma grandeza é dado pela incerteza da medida.

Desse modo algarismos à direita da incerteza deverão ser arredondados, seguindo o critério de arredondamento descrito anteriormente.

A seguir, alguns exemplos de como escrever corretamente o resultado de uma medição:

Exemplo 1:

Valor da leitura: $\bar{x} = 3{,}04721$m; valor do desvio padrão amostral que será utilizado para representar a incerteza: $s = 0{,}02193$m. Neste caso como o primeiro algarismo significativo da incerteza é um número 2, que é menor que 3, a Incerteza deve ser escrita com dois algarismos significativos, ou seja: $s = 0{,}022$; o valor médio deve ser truncado na mesma posição em relação a vírgula do menor algarismo significativo da incerteza, então a leitura deverá ser escrita como: $\bar{x} = 3{,}047$. O valor experimental da grandeza deverá ser indicado como: $x = (3{,}047 \pm 0{,}022)\text{m}$

Exemplo 2:

Valor da leitura: $\bar{x} = 3{,}4721$ m; valor da incerteza: $s = 0{,}3193$ m.

Incerteza deve ser escrita como: $s = 0{,}3$; então a leitura deverá ser escrita como: $\bar{x} = 3{,}5$. O valor experimental da grandeza deverá ser indicado como: $x = (3{,}5 \pm 0{,}3)m$

Outros exemplos de medições e como expressar corretamente o valor experimental:

Exemplo 3 (obtidos com um paquímetro, por exemplo):

Valor médio das leituras: $\bar{x} = 3{,}4721$; valor da resolução do instrumento: $r = 0{,}05$

O valor médio deverá ser truncado na segunda casa decimal que é onde está o menor algarismo significativo da resolução, então o valor médio truncado fica: $\bar{x} = 3{,}47$. O valor experimental da grandeza deverá ser indicado como: $x = (3{,}47 \pm 0{,}05)\text{mm}$

Exemplo 4 (obtidos com uma trena):

Valor da leitura: $\bar{x} = 2{,}18581$; valor da resolução do instrumento: $r = 0{,}001$

O valor médio deverá ser truncado na terceira casa decimal que é onde está o menor algarismo significativo da resolução, então o valor médio truncado fica: $\bar{x} = 2{,}186$. O valor experimental da grandeza deverá ser indicado como: $x = (2{,}186 \pm 0{,}001)\text{m}$

- **Propagação das Incertezas**

Muitas grandezas físicas são obtidas através de cálculos feitos à partir de grandezas experimentais. Neste caso, é preciso saber como as incertezas destas grandezas influenciarão o resultado. Existem regras para determinar como o erro se propaga que dependem das operações efetuadas, são elas:

Considere as grandezas: $L = (\bar{L} \pm s)$ ; $M = (\bar{M} \pm p)$ ; $H = (\bar{H} \pm d)$ e os expoentes n, $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$. O resultado das operações com estas grandezas será: $R = (\bar{R} \pm e)$

| **Cálculos com as grandezas** | **Operação com os valores médios das grandezas** | **Propagação das incertezas das grandezas para cada tipo de cálculo matemático** |
|---|---|---|
| soma: R = L + M | $\bar{R} = \bar{L} + \bar{M}$ | $e = \sqrt{s^2 + p^2}$ |
| subtração: R = L - M | $\bar{R} = \bar{L} - \bar{M}$ | $e = \sqrt{s^2 + p^2}$ |
| produto: $R = L \cdot M^{\alpha} \cdot H^{\beta}$ | $\bar{R} = \bar{L} \cdot \bar{M}^{\alpha} \cdot \bar{H}^{\beta}$ | $e = \bar{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\alpha \cdot \frac{p}{\bar{M}}\right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{d}{\bar{H}}\right)^2}$ |
| razão: R = L / M | $\bar{R} = \frac{\bar{L}}{\bar{M}}$ | $e = \bar{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{p}{\bar{M}}\right)^2}$ |
| potenciação: $R = L^n$ | $\bar{R} = (\bar{L})^n$ | $e = n \cdot (\bar{L})^{n-1} \cdot s$ |

Exemplo 1) Ao medir as dimensões de uma peça retangular plana, foram obtidas as leituras listadas na tabela abaixo (resolução do paquímetro 0,02mm):

a) Quais são os valores do comprimento e da largura da chapa?

b) Qual a área da chapa?

| **medida** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **C (mm)** | 8,45 | 8,40 | 8,35 | 8,50 | 8,40 | 8,45 | 8,35 | 8,40 | 8,35 | 8,45 |
| **L (mm)** | 6,50 | 6,40 | 6,30 | 6,45 | 6,45 | 6,50 | 6,35 | 6,40 | 6,45 | 6,30 |

*SOLUÇÃO:* Usando as fórmulas para o valor médio e para o desvio padrão amostral (pode-se usar uma calculadora científica no modo estatístico), obtém-se:

comprimento: $\bar{c} = 8{,}41\,\text{mm}$ e $s_c = 0{,}05\text{mm}$

largura: $\bar{L} = 6{,}41\text{mm}$ e $s_L = 0{,}07\,\text{mm}$

Como os desvios $s_c$ e $s_L$ são maiores que a resolução r = 0,02mm, deve-se escrever o comprimento como: $c = (8{,}41 \pm 0{,}05)\text{mm}$ e a largura como: $L = (6{,}41 \pm 0{,}07)\text{mm}$

A área (A) da chapa retangular é: A = C.L e o valor médio da área tem como resultado: $\overline{A} = \overline{c} \cdot \overline{L} = 8{,}41 \cdot 6{,}41 = 53{,}91\,\text{mm}^2$

Cálculo da incerteza propagada pela fórmula do produto:

$$S_A = \overline{c} \cdot \overline{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_c}{\overline{c}}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{\overline{L}}\right)^2} = 8{,}41 \cdot 6{,}41 \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{8{,}41}\right)^2 + \left(\frac{0{,}07}{6{,}41}\right)^2}$$

$$S_A = 53{,}91 \cdot \sqrt{(0{,}0059)^2 + (0{,}0109)^2} = 53{,}91 \cdot 0{,}0124 = 0{,}67\,.$$

Neste caso, (se o primeiro algarismo significativo do desvio é ≥3, a incerteza deve conter apenas um algarismo significativo) deve-se escrever: $S_A = 0{,}7\,\text{mm}$ com este valor da incerteza, deve-se arredondar o valor médio da área para: $\overline{A} = 53{,}9\,\text{mm}^2$

E a área da chapa determinada experimentalmente é escrita como:

$$A = (53{,}9 \pm 0{,}7)\text{mm}^2$$

*observações:* É interessante observar que: tomando-se os maiores e os menores valores de leitura para o comprimento e a largura obtém-se: $A_{minima}$ = =52,61mm² e $A_{máxima}$ = 55,25mm² . Ao passo que pelo tratamento estatístico resulta no intervalo $A_{mínima}$ = 53,9 - 0,7 = 53,2mm² e $A_{máxima}$ = 53,9 + 0,7 = =54,6mm². Ocorre que o resultado da área pelo erro propagado indica que o resultado desta medida deve estar compreendido entre 53,2 e 54,6mm² , com 68,27% de chance, ou seja, não obrigatoriamente uma medida realizada, ou a ser realizada, estará dentro deste intervalo, mas este é o intervalo que indica o grau de confiança nas medidas realizadas (intervalo de confiança) ou com relação a uma previsão de uma medida qualquer ou futura.

Exemplo 2) Calcule o perímetro da chapa retangular dado no exemplo 1.

*SOLUÇÃO:* perímetro ( d ): d = 2 . c + 2 . L = 2 . ( c + L )

então: $\overline{d} = 2 \cdot (\overline{c} + \overline{L}) = 2 \cdot (8{,}41 + 6{,}41) = 2 \cdot 14{,}82 = 29{,}64$ e pela fórmula da soma:

$$S_s = \sqrt{s^2 + p^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}07^2} = \sqrt{0{,}0025 + 0{,}0049} = \sqrt{0{,}0074}$$

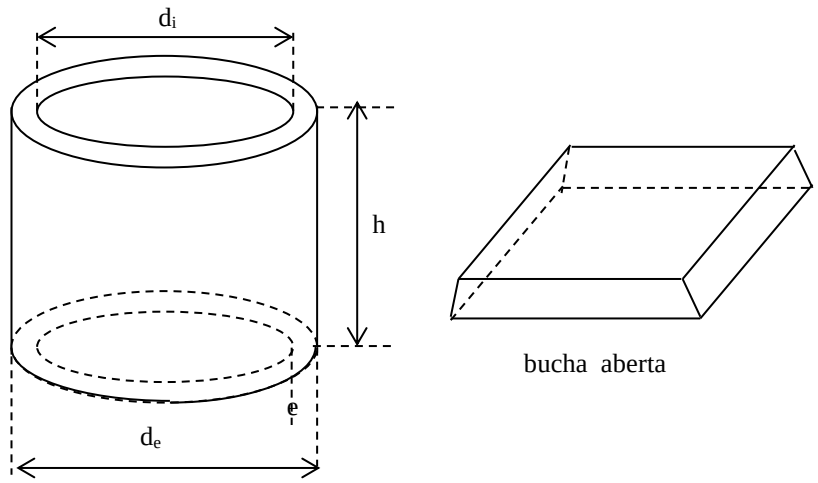
$$S_S = 0{,}086 \cong 0{,}09\text{mm}$$

mas a soma (c + L ) é multiplicada por 2, então o desvio também será multiplicado pelo mesmo fator: $S_d = 2.S_s = 2 \,.\, 0{,}09 = 0{,}18$ então, o perímetro determinado experimentalmente é:

$$d = \overline{d} \pm S_d = (29{,}64 \pm 0{,}18)\text{mm}$$

Exemplo 3) Uma bucha cilíndrica tem as seguintes leituras de diâmetros externo e interno, altura e espessura (em milímetros), determinadas através de um paquímetro com resolução r = 0,02mm:

| leitura | altura (mm) | ∅ interno (mm) | ∅ externo (mm) | espessura (mm) |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 31,20 | 24,38 | 26,32 | 0,98 |
| **2** | 31,14 | 24,40 | 26,38 | 0,96 |
| **3** | 31,22 | 24,42 | 26,30 | 0,98 |
| **4** | 31,26 | 24,34 | 26,36 | 1,00 |
| **5** | 31,18 | 24,38 | 26,40 | 1,02 |
| **6** | 31,22 | 24,40 | 26,38 | 0,98 |
| **7** | 31,26 | 24,38 | 26,38 | 1,00 |
| **8** | 31,18 | 24,38 | 26,36 | 0,96 |
| **9** | 31,22 | 24,34 | 26,34 | 1,02 |
| **10** | 31,26 | 24,38 | 26,34 | 1,00 |




*SOLUÇÃO*: Usando-se uma calculadora científica (no modo estatístico), obtém-se os seguintes valores para o valor médio e o desvio padrão amostral:

| medida (mm) | valor médio | desvio padrão |
|---|---|---|
| **diâmetro interno ($d_i$)** | $\overline{d_i} = 24{,}38$ | $s_i = 0{,}03$ |
| **diâmetro externo ($d_e$)** | $\overline{d_e} = 26{,}36$ | $s_e = 0{,}03$ |
| **altura (h)** | $\overline{h} = 31{,}21$ | $s_h = 0{,}04$ |
| **espessura (e)** | $\overline{e} = 0{,}99$ | $s_e = 0{,}02$ |

Veja que para todas as dimensões, o desvio padrão é maior que a resolução da escala r = 0,02mm.

Desenrolando-se a bucha obtém-se um prisma trapezoidal e o volume da bucha será obtido pelas equações (lembrando que o comprimento de uma circunferência de diâmetro d é dado por: $c = 2.\pi.r = \pi.d$), o volume do prisma trapezoidal (bucha) será determinado pela equação:

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot (d_i + d_e) \cdot h \cdot e$$

O valor da soma dos diâmetros médios é: $\bar{d} = \bar{d}_i + \bar{d}_e = 50{,}74$ e o erro propagado pela soma dos diâmetros:

$$s_d = \sqrt{s_i^{\,2} + s_e^{\,2}} = \sqrt{(0{,}025)^2 + (0{,}03)^2} = 0{,}04$$

O valor do produto entre a soma dos diâmetros, a altura e a espessura é: $\bar{V} = \frac{\pi}{2} \cdot \bar{d} \cdot \bar{h} \cdot \bar{e} = \frac{\pi}{2} \cdot 50{,}74 \cdot 31{,}21 \cdot 0{,}99 = 2.462{,}63$ e o erro propagado nesta operação:

$$S_V = \frac{\pi}{2} \cdot \bar{d} \cdot \bar{h} \cdot \bar{e} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{s_e}{\bar{e}}\right)^2}$$

então o volume da bucha é:

$$S_V = \bar{V} \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}02}{25{,}37}\right)^2 + \left(\frac{0{,}04}{31{,}21}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{0{,}99}\right)^2} = 49{,}89 \cong 0{,}5\text{x}10^2$$

$$V = \bar{V} \pm S_V = (2{,}46 \pm 0{,}05) \times 10^3 mm^3$$

Exemplo 4) Uma esfera tem as seguintes leituras de seu diâmetro (em milímetros), determinadas através de um micrômetro, resolução r = 0,01mm. Qual é o volume da esfera?

| **diâmetro** | 11,99 | 12,07 | 12,01 | 11,90 | 12,10 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12,04 | 11,98 | 12,06 | 12,00 | 11,94 |

*SOLUÇÃO:* Usando-se uma calculadora científica (no modo estatístico), obtém-se o valor médio do diâmetro: $\bar{d} = 12{,}01mm$ e do desvio padrão amostral, $s = 0{,}06mm$. Como o desvio padrão é maior que a resolução da escala r = 0,01mm, a incerteza no diâmetro será representada pelo desvio padrão.

O volume da esfera é dado pela equação: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ mas $r = \frac{d}{2}$

então: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d^3}{2^3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$

O volume médio da esfera é: $\bar{V} = \frac{\pi}{6} \cdot \bar{d}^3 = \frac{\pi}{6} \cdot (12{,}01)^3 = 907{,}04$, como o diâmetro é elevado ao cubo, pela fórmula de propagação do erro de potenciação: $S_n = n \cdot \bar{L}^{n-1} \cdot s$

$S_3 = 3 \cdot \bar{d}^{3-1} \cdot s = 3 \cdot \bar{d}^2 \cdot s = 3 \cdot (12{,}01)^2 \cdot 0{,}06 = 26$. Mas o diâmetro ao cubo é multiplicado por $\pi$ e dividido por 6, então o desvio padrão propagado do volume da esfera é $S_V$:

$S_V = \frac{\pi}{6} \cdot S_3 = \frac{\pi}{6} \cdot 26 = 13{,}59 \cong 14 = 0{,}14\text{x}10^2$ (como o primeiro algarismo significativo de $S_V$ é 1, deve-se escrever a incerteza com dois algarismos significativos).

Com este resultado, deve-se arredondar o valor do volume médio da esfera para: $\overline{V} = 907{,}04 \cong 907 = 9{,}07 x 10^2\,mm^3$ e o volume determinado experimentalmente é escrito como:

$$V = (\overline{V} \pm S_V) = (9{,}07 \pm 0{,}14) x 10^2\,mm^3$$

Exemplo 5) Uma esfera percorre uma distância $\Delta s$ num intervalo de tempo $\Delta t$. As 10 medidas estão listadas na tabela abaixo. Foram feitas com uma trena de resolução r = 1mm e com um cronômetro de resolução r = 0,01s. Qual é a velocidade desta esfera?

| leitura | distância (mm) | tempo (s) |
|---|---|---|
| **1** | 3080 | 82,14 |
| **2** | 3137 | 83,60 |
| **3** | 3102 | 81,52 |
| **4** | 3125 | 80,34 |
| **5** | 3119 | 83,78 |
| **6** | 3084 | 87,40 |
| **7** | 3092 | 83,38 |
| **8** | 3120 | 85,35 |
| **9** | 3135 | 84,15 |
| **10** | 3094 | 86,46 |

| | distância (mm) | tempo (s) |
|---|---|---|
| **MÉDIA** | 3108,8 | 83,812 |
| **DESV PAD** | 20,99100336 | 2,178214355 |
| **incerteza** | 21 | 2,2 |
| **média truncada** | 3109 | 83,8 |
| **valor experimental** | **(3109 ± 21)mm** | **(83,8 ± 2,2)s** |

| velocidade da esfera | mm/s |
|---|---|
| **valor médio** | 37,10023866 |
| **incerteza propagada** | 1,005713178 |
| **incerteza** | 1,0 |
| **média truncada** | 37,1 |
| **valor experimental** | (37,1 ± 1,0) mm/s |

Observações Gerais:

1- Nos exemplos acima, foram abordados o cálculo da média, desvio padrão amostral e propagação de erros para as operações de soma, produto e potenciação. As propagações para subtração e razão, assim como outras operações matemáticas seguem o mesmo padrão de resolução.

2- Cada calculadora utiliza uma linguagem própria de operação. Na maioria, o desvio padrão amostral é denotado por: $s_x$ ou $s$ ou $\sigma_s$ ou $\sigma_{n-1}$.

**Referências**:

- Helene, O. A. M., Vanin, V. R. Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental. 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher. 1991.

- Vuolo, J.H. Fundamentos da Teoria de Erros. 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher. 1996.

- Carrero, J. C. B., Manual de Laboratório de Física. 30ª Edição. São Paulo: Disponibilizado por meio eletrônico em Laboratório de Física :: ISCIC (webnode.page). Acesso em 03/mar/2024.