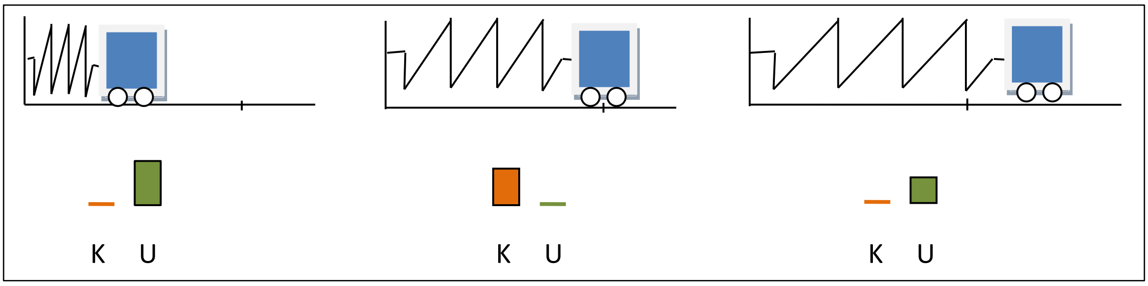
MOVIMENTO HARMÔNICO AMORTECIDO – MHA

Um conjunto massa (m) com uma mola de rigidez (k) sujeito a um atrito viscoso (b) é regido pela segunda Lei de Newton:



Força elástica: $F_{Hooke} = -k \cdot x$ Força de atrito viscoso: $F_{visc} = -b \cdot v = -b \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad -k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

<u>Solução da EDO de 2ª ordem</u>:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \cos\left(\omega_A \cdot t\right)$$

Derivando para obter a velocidade:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\, x_0 \cdot \frac{b}{2 \cdot m} \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \cos\left(\omega_A \cdot t\right) - \omega_A \cdot x_0 \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot sen\left(\omega_A \cdot t\right)$$

Derivando novamente para obter a aceleração:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{b^2}{4 \cdot m^2} - {\omega_A}^2\right) \cdot x_0 \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \cos(\omega_A \cdot t) + \frac{\omega_A \cdot b \cdot x_0}{m} \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot sen\left(\omega_A \cdot t\right)$$

Substituindo na EDO de 2ª ordem, chega-se à expressão da frequência angular:

$$\omega_A = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

Lembrando que: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ e que $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

O <u>Tempo de Relaxação</u> é definido por: $\tau = \frac{m}{b}$ esta constante, corresponde a uma queda na amplitude de 0,6065 após uma oscilação completa.

A Energia Potencial Elástica do Oscilador Harmônico é:

$$U(t) = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \cdot \cos^2\left(\omega_A \cdot t\right)$$

Veja que para $t = \frac{n}{2} \cdot T$ onde n é um número inteiro, a energia potencial será máxima e valerá:

$$U(t) = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \qquad \text{para } t = \frac{n}{2} \cdot T$$

Já a Energia Mecânica inicial é: $E_{inicial} = K_0 + U_0 \qquad \rightarrow \qquad E_{inicial} = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2}$

Num instante de tempo qualquer, a Energia Mecânica terá o mesmo decaimento da energia potencial:

$$E(t) = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$$

Num instante de tempo qualquer, pode-se escrever que a Energia Cinética é:

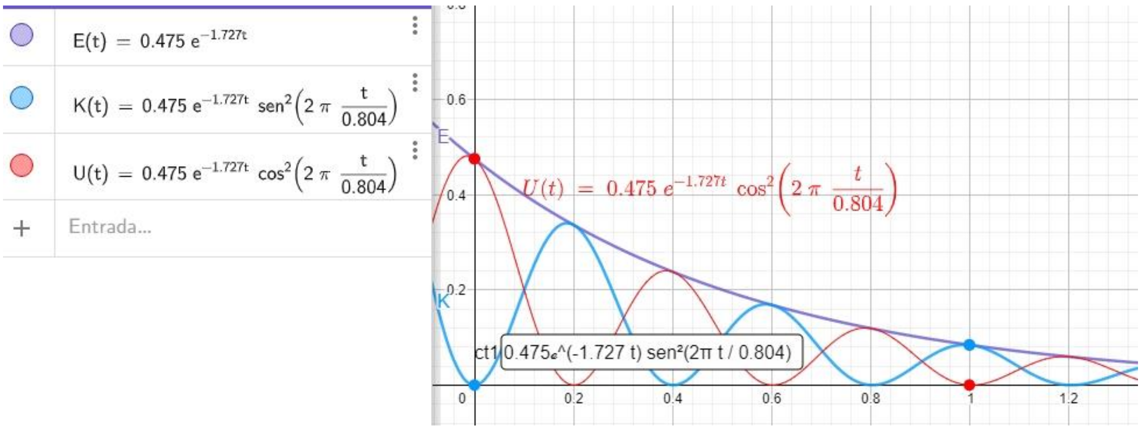
$$K(t) = E(t) - U(t) = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} - \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \cdot \cos^2(\omega_A \cdot t)$$

$$K(t) = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \cdot [1 - \cos^2(\omega_A \cdot t)]$$

$$K(t) = \frac{k \cdot {x_0}^2}{2} \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t} \cdot \text{sen}^2(\omega_A \cdot t)$$

Veja o Gráfico construído no Geogebra: considerando-se os valores:

X_0 = 0,0707mm; b = 544kg/s; m = 315kg; T = 0,804s; k = 19kN/m



[Calculadora - GeoGebra]